අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.
சமன்பாடு $f(x) = 0$ இரு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $a^2 > 3b$ எனக் காட்டுக.

$f(x)=0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta$ ஐ a இன் சார்பிலும் $\alpha\beta$ ஐ b இன் சார்பிலும் எழுதுக.
$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் $|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|$ ஆகியவற்றை அதன் மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு
$9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2 b} = 0$ இனால் தரப்படுகிறது எனவும் காட்டுக.

(b) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p, q \in \mathbb{R}$ ஆகும். $g(x)$ ஆனது $(x-1)(x+2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $3x+2$ ஆகும். $g(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $(x+2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி -4 எனவும் காட்டுக.

p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு $(x+1)$ ஆனது $g(x)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டுக.

12. (a) $(5 + 2x)^{14}$ இன் ஈருறுப்பு விரியை x இன் ஏறு வலுக்களில் எழுதுக.
$r = 0, 1, 2, \ldots, 14$ இற்கு மேற்குறித்த விரியில் x^r ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்பு T_r எனக் கொள்வோம்.
$x \neq 0$ இற்கு $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2(14 - r)}{5(r + 1)}x$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $x = \frac{4}{3}$ ஆக இருக்கும்போது மேற்குறித்த விரியில் மிகப் பெரிய உறுப்பைத் தரும் r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $c \geq 0$ எனக் கொள்வோம். $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{1}{(r+c)} - \frac{1}{(r+c+2)}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{(n+c+1)} - \frac{1}{(n+c+2)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ ஒருங்குகின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

c இற்கு உகந்த பெறுமானங்களுடன் இக்கூட்டுத்தொகையைப் பயன்படுத்தி
$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ எனக் காட்டுக.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ ஆனது தாயம் $\mathbf{B}$ இன் நிலைமாற்றைக் குறிக்கின்றது.

$a = 1, b = -1$ எனக் காட்டி, a, b ஆகியவற்றுக்கு இப்பெறுமானங்களுடன் $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ ஐக் காண்க.

$\mathbf{P}^{-1}$ ஐ எழுதி, அதனைப் பயன்படுத்தி, $\mathbf{PQ} = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{Q}$ ஐக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 இலான சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(*b*) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z| = 1$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு C ஐப் பரும்படியாக வரைக.

$z_0 = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ஆகும். $\frac{1}{z_0},\ z_0^2$ ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டினை a இன் சார்பிலும் தலைமை வீசலை θ இன் சார்பிலும் காண்க.

P, Q, R, S ஆகியன முறையே $z_0,\ \frac{1}{z_0},\ z_0 + \frac{1}{z_0},\ z_0^2$ என்னும் சிக்கலெண்களை மேற்குறித்த ஆகண் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளெனக் கொள்வோம்.

புள்ளி P ஆனது மேற்குறித்த C மீது இருக்கும்போது

(i) Q, S ஆகிய புள்ளிகளும் C மீது இருக்கும் எனவும்

(ii) புள்ளி R மெய் அச்சு மீது 0 இற்கும் 2 இற்குமிடையே இருக்கும் எனவும்

காட்டுக.

14. (*a*) $x \neq 1, 2$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

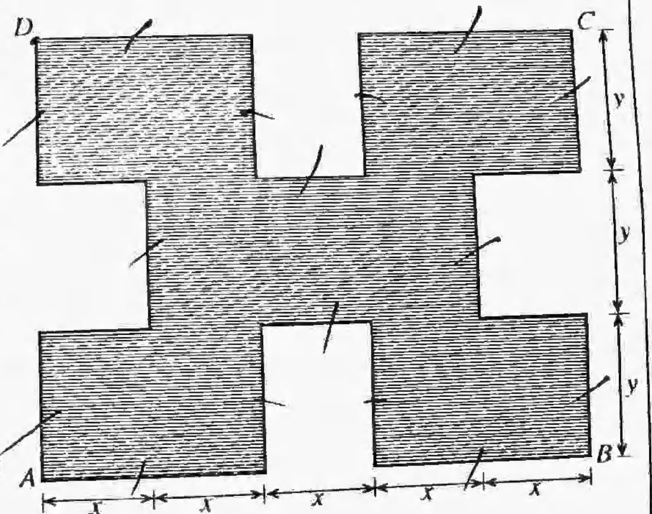
$x \neq 1, 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \dfrac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ ஐத் தீர்க்க.

(*b*) அருகில் உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $385\ \mathrm{m}^2$ ஆகும். $5x$ மீற்றர் நீளமும் $3y$ மீற்றர் அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ இலிருந்து ஒவ்வொன்றும் y மீற்றர் நீளமும் x மீற்றர் அகலமும் உள்ள சர்வசமனான நான்கு செவ்வகங்களை அகற்றுவதன் மூலம் இப்பிரதேசம் பெறப்படுகின்றது. $y = \dfrac{35}{x}$ எனவும் மீற்றரில் அளக்கப்படும் நிழற்றிய பிரதேசத்தின் சுற்றளவு P ஆனது $x > 0$ இற்கு $P = 14x + \dfrac{350}{x}$ இனால் தரப்படும் எனவும் காட்டுக.

P ஆனது இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



[பக். 9 ஐப் பார்க்க

15. (*a*) (i) $\frac{1}{x(x+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைத்து, **இதிலிருந்து,** $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

(ii) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int xe^{-x}\,dx$ ஐக் கண்டு, **இதிலிருந்து,** வளையி $y = xe^{-x}$ இனாலும் $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளினாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(*b*) $c > 0$ எனவும் $I = \int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}\,dx$ எனவும் கொள்வோம். பிரதியீடு $x = c\tan\theta$ ஐப் பயன்படுத்தி $I = \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}J$ எனக் காட்டுக; இங்கு $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$.

a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி, $J = \frac{\pi}{8}\ln 2$ எனக் காட்டுக.

$I = \frac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ என்பதை உய்த்தறிக.

16. $m \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி $P \equiv (0, 1)$ ஆனது $y = mx$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு l மீது இருப்பதில்லையெனக் காட்டுக.

P இனூடாக l இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகளை வடிவம் $(-mt, t+1)$ இல் எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு t ஒரு பரமானம்.

இதிலிருந்து, P இலிருந்து l இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடியாகிய புள்ளி Q இன் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக.

m மாறும்போது புள்ளி Q ஆனது $x^2 + y^2 - y = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் S மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டி, Q இன் ஒழுக்கை xy–தளத்தில் பரும்படியாக வரைக.

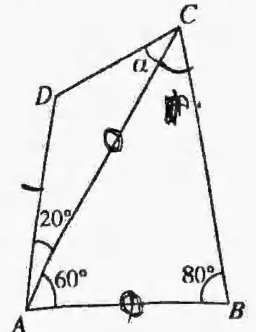
அத்துடன் புள்ளி $R \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ஆனது S மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

S ஐ வெளிப்புறமாகப் புள்ளி R இல் தொடுகின்றதும் x-அச்சு மீது மையம் இருக்கின்றதுமான வட்டம் S' இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

S' இன் மையத்தை மையமாகக் கொண்டதும் S ஐ உட்புறமாகத் தொடுகின்றதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

17. (*a*) (i) $0° < \theta < 90°$ இற்கு $\frac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

(ii) தரப்பட்டுள்ள உருவில் $ABCD$ ஒரு நாற்பக்கலாகும்; இங்கு $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$, $B\hat{A}C = 60°$ ஆகும்.



$A\hat{C}D = \alpha$ எனக் கொள்வோம். முக்கோணி ABC இற்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $\frac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ எனக் காட்டுக.

அடுத்ததாக முக்கோணி ADC இற்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ எனக் காட்டுக.

$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin\alpha$ என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $\cot\alpha = \frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ எனக் காட்டுக.

இப்போது மேலே (i) இல் உள்ள பேறைப் பயன்படுத்தி $\alpha = 30°$ எனக் காட்டுக.

(*b*) சமன்பாடு $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ ஐத் தீர்க்க.

***

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

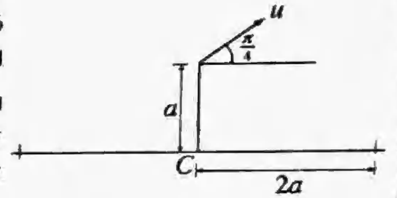
10 T II

பகுதி B

* **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.)

11. (a) உயரம் a ஐ உடைய ஒரு நிலைக்குத்துக் கோபுரத்தின் அடி கிடைத் தரை மீது உள்ள ஆரை $2a$ ஐ உடைய ஒரு வட்டத் தடாகத்தின் மையம் C இல் உள்ளது. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து கிடைக்கு மேலே கோணம் $\frac{\pi}{4}$ இல் கதி u உடன் ஒரு சிறிய கல் எறியப்படுகின்றது (உருவைப் பார்க்க). கல் புவியீர்ப்பின் கீழ்ச் சுயாதீனமாக இயங்கி C இலிருந்து தூரம் R இல் C இனூடாக உள்ள கிடைத் தளத்தில் படுகின்றது. சமன்பாடு $gR^2 - u^2R - u^2a = 0$ இனால் R தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.



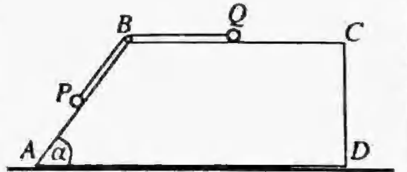
R ஐ u, a, g ஆகியவற்றின் சார்பில் கண்டு, $u^2 > \frac{4}{3}ga$ எனின், கல் தடாகத்தில் விழுவதில்லை என்பதை உய்த்தறிக.

(b) ஒரு கப்பல் S ஆனது புவி தொடர்பாகச் சீரான கதி $u\ \text{km h}^{-1}$ உடன் கிழக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. ஒரு படகு B இலிருந்து மேற்கிற்கு கோணம் θ தெற்கே ஒரு தூரம் l km இல் கப்பல் இருக்கும் கணத்தில் படகு கப்பலை இடைமறிக்கும் நோக்கத்தில் புவி தொடர்பாகச் சீரான கதி $v\ \text{km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் செல்கின்றது; இங்கு $u\sin\theta < v < u$. கப்பலும் படகும் அவற்றின் கதிகளையும் பாதைகளையும் மாற்றாமல் பேணுகின்றனவெனக் கொண்டு புவி தொடர்பாகப் படகு செல்லத்தக்க இரு பாதைகளையும் துணிவதற்கு வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

புவி தொடர்பாகப் படகின் இரு இயல்தகு இயக்கத் திசைகளுக்குமிடையே உள்ள கோணம் $\pi - 2\alpha$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\theta}{v}\right)$.

படகு இவ்விரு பாதைகளிலும் சென்று கப்பலை இடைமறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரங்கள் t_1 மணித்தியாலம் எனவும் t_2 மணித்தியாலம் எனவும் கொள்வோம். $t_1 + t_2 = \frac{2lu\cos\theta}{u^2 - v^2}$ எனக் காட்டுக.

12. (a) உருவில் உள்ள சரிவகம் $ABCD$ ஆனது திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான குற்றியின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள ஒரு நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டாகும். AD, BC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாக இருக்கும் அதே வேளை கோடு AB ஆனது அது அடங்கும் முகத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோடாகும். மேலும் $AB = 2a$, $B\hat{A}D = \alpha$; இங்கு $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ஆகும். AD ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது இருக்குமாறு குற்றி வைக்கப்படுகின்றது. நீளம் $l\ (> 2a)$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை B இல் உள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் அதே வேளை அதன் ஒரு நுனியில் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உம் மற்றைய நுனியில் அதே திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q உம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவில் காணப்படுகின்றவாறு துணிக்கை P ஆனது AB இன் நடுப் புள்ளியிலும் துணிக்கை Q ஆனது BC மீதும் வைக்கப்பட்டு இழை இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.

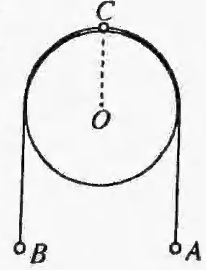


நிலம் தொடர்பாகக் குற்றியின் ஆர்முடுகல் $\frac{4}{17}g$ எனக் காட்டி, குற்றி தொடர்பாக P இன் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

மேலும் துணிக்கை P ஆனது A ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{17a}{5g}}$ எனக் காட்டுக.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

(b) ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவுள்ள A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் நீளம் $l(> 2\pi a)$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை C ஆனது இழையின் நடுப் புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான கோளத்தின் உச்சிப் புள்ளியில் துணிக்கை C உம் A, B ஆகிய துணிக்கைகள் O இனூடாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாகத் தொங்கிக்கொண்டும் இருக்க உருவில் காணப்படுகின்றவாறு இழை கோளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் துணிக்கை A ஆனது கீழ்நோக்கி இயங்குமாறு துணிக்கை C இற்குக் கோளத்தின் மீது அதே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு சிறிய இடப்பெயர்ச்சி தரப்படுகின்றது. துணிக்கை C ஆனது கோளத்துடன் தொடுகையில் இருக்கும் வரைக்கும் $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(1-\cos\theta)$ எனக் காட்டுக; இங்கு θ ஆனது OC திரும்பியுள்ள கோணமாகும்.



$\theta = \frac{\pi}{3}$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை C ஆனது கோளத்திலிருந்து பிரிந்து செல்லுமென மேலும் காட்டுக.

13. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்திற்கு மேலே ஓர் உயரம் $3a$ இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை O இற்குக் கிட்ட வைக்கப்பட்டு, கதி $\sqrt{ga}$ உடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. இழையின் நீளம் x ஆனது $a \le x < 3a$ இற்குச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x-2a) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டி, இவ்வெளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தைக் காண்க.

நிலத்துடனான முதல் மொத்தல் வரைக்கும் துணிக்கையின் கீழ்முக இயக்கத்திற்குச் சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $a \le x < 3a$ இற்கு $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ எனக் காட்டுக.

$X = x - 2a$ எனக் கொண்டு இறுதிச் சமன்பாட்டை $-a \le X < a$ இற்கு வடிவம் $\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\left(A^2 - X^2\right)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு A ஆனது துணியப்பட வேண்டிய வீச்சமாகும்.

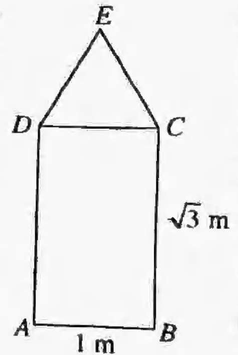
நிலத்துடனான முதல் மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் துணிக்கையின் வேகம் யாது ?

துணிக்கைக்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகும். முதல் மொத்தலுக்குப் பின்னர் இழை தளரும் வரைக்கும் துணிக்கையின் மேன்முக இயக்கத்திற்கு $-a \le X < a$ இற்கு $\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\left(B^2 - X^2\right)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு B ஆனது இப்புதிய எளிய இசை இயக்கத்தின் துணியப்பட வேண்டிய வீச்சமாகும்.

துணிக்கை மேலே விவரித்த எளிய இசை இயக்கங்களைக் கீழ்முகமாகவும் மேன்முகமாகவும் ஆற்றும் மொத்த நேரம் $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}$ எனக் காட்டுக.

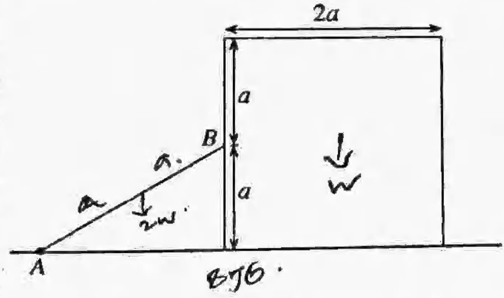
14. (a) A, B என்னும் இரு வேறுவேறான புள்ளிகளுடன் **ஒரே கோட்டில் இல்லாத** ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B ஆகியவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும். O பற்றி ஒரு புள்ளி C இன் தானக் காவி $\mathbf{c} = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $0 < \lambda < 1$.
$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ ஆகிய காவிகளை $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.
இதிலிருந்து, புள்ளி C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB மீது இருக்கின்றது எனவும் $AC : CB = \lambda : (1-\lambda)$ எனவும் காட்டுக.
இப்போது கோடு OC ஆனது கோணம் AOB ஐ இருகூறிடுகின்றதெனக் கொள்வோம். $|\mathbf{b}|(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ எனக் காட்டி, **அதிலிருந்து,** λ ஐக் காண்க.

(b) உருவில் $ABCD$ ஆனது $AB = 1$ m, $BC = \sqrt{3}$ m ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வகமாக இருக்கும் அதே வேளை CDE ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். 5, $2\sqrt{3}$, 3, $4\sqrt{3}$, P, Q நியூற்றன் பருமனுள்ள விசைகள் முறையே BA, DA, DC, CB, CE, DE வழியே எழுத்து ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குகின்றது.
$P = 4, Q = 8$ எனக் காட்டி, இவ்விணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.
இப்போது BA, DA ஆகியவற்றின் வழியே தாக்கும் விசைகளின் பருமன்கள் அவ்வாறே இருக்க அவற்றின் திசைகள் புறமாற்றப்படுகின்றன. புதிய தொகுதி $2\sqrt{37}$ நியூற்றன் பருமனுள்ள ஒரு தனி விளையுள் விசையாக ஒடுங்குகின்றது எனக் காட்டுக.
இவ்விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோடு நீட்டப்பட்ட BA ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து A இன் தூரம் $\frac{7}{4}$ m எனவும் காட்டுக.

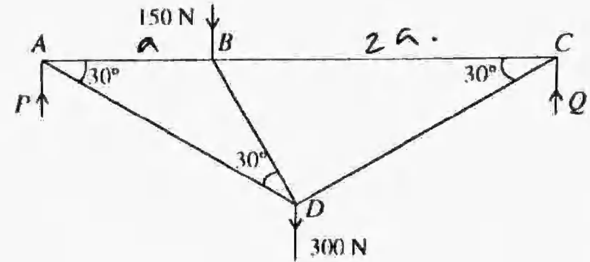


[பக். 9 ஐப் பார்க்க

15.(*a*) நிறை W ஐயும் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள பக்கத்தையும் உடைய ஒரு சீரான சதுரமுகிக் குற்றி ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. நிறை $2W$ ஐயும் நீளம் $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஆனது கிடை நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை முனை B ஆனது சதுரமுகியின் ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்து முகத்திற்கு எதிரே அதன் மையத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துத் தளம் குற்றியின் அந்நிலைக்குத்து முகத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. (உரிய நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டிற்கு உருவைப் பார்க்க.) சதுரமுகிக் குற்றிக்கும் கரடான கிடை நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். $\mu \geq \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.



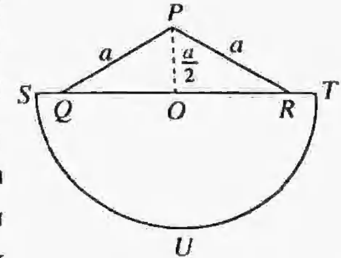
(*b*) முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, AD, BD, CD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்ட ஒரு சட்டப்படல் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. $AB = a$ மீற்றர், $BC = 2a$ மீற்றர். $B\hat{A}D = B\hat{D}A = B\hat{C}D = 30°$. சட்டப்படலில் B இல் 150 N, D இல் 300 N என்னும் சுமைகள் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளன. அது AB, BC ஆகியன கிடையாக இருக்குமாறு முறையே A இலும் C இலும் பிரயோகிக்கப்படும் P, Q என்னும் இரு நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப்பட்டு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. $P = 250$ N எனக் காட்டுக.



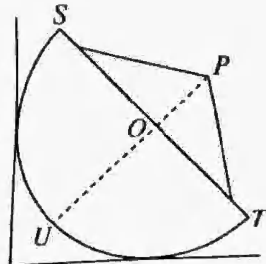
போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இதிலிருந்து, எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு, அவை இழுவைகளா உதைப்புகளா என எடுத்துரைக்க.

16. மையம் C ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய அரைவட்ட வில்லின் வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியின் திணிவு மையம் C இலிருந்து தூரம் $\frac{2a}{\pi}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

அருகில் உள்ள உருவில் PQ, PR, ST ஆகியன ஓரலகு நீளத்தின் திணிவு ρ ஆகவுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியிலிருந்து வெட்டப்பட்ட மூன்று நேர்கோட்டுத் துண்டுகளாகும். PQ, PR ஆகிய இரு துண்டுகளும் புள்ளி P இல் ஒன்றோடொன்று உருகிணைக்கப்பட்டு, பின்னர் Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் ST உடன் உருகிணைக்கப்பட்டுள்ளன. $PQ = PR = a$, $ST = 2a$, $PO = \frac{a}{2}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு O ஆனது QR, ST ஆகிய இரண்டினதும் நடுப் புள்ளியாகும். மேலும் SUT ஆனது ஓரலகு நீளத்தின் திணிவு $k\rho$ ஆகவுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியிலிருந்து செய்யப்பட்ட மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஓர் அரைவட்ட வில்லாகும்; இங்கு $k (> 0)$ ஒரு மாறிலி. அரைவட்டக் கம்பி SUT ஐ PQR இன் தளத்தில் S, T ஆகிய புள்ளிகளில் கம்பி ST உடன் உருகிணைப்பதன் மூலம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள விறைப்பான தளக் கம்பிச் சட்டம் L ஆக்கப்பட்டுள்ளது. L இன் திணிவு மையம் P இலிருந்து தூரம் $\left(\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right)\frac{a}{2}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.



அருகில் இருக்கும் உருவில் உள்ளவாறு கம்பிச் சட்டம் L ஆனது அதன் வட்டப் பகுதி ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரையும் நழுவுவதைத் தடுப்பதற்குப் போதிய அளவில் கரடான ஒரு கிடைத் தரையையும் தொட்டுக்கொண்டு அதன் தளம் சுவருக்குச் செங்குத்தாக இருக்க நாப்பத்தில் உள்ளது. L மீது தாக்கும் விசைகளைக் குறித்து, $k > \frac{1}{4}$ எனக் காட்டுக.



இப்போது $k = 1$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி P இல் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையை L உடன் இணைத்த பின்னரும் மேற்குறித்த அமைவில் நாப்பம் பேணப்படுகின்றது. $m < 3\rho a$ எனக் காட்டுக.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

17. (*a*) A, B, C என்னும் பைகளில் ஒவ்வொன்றிலும் நிறம் தவிர ஏனைய எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனான வெள்ளைப் பந்துகளும் கறுப்புப் பந்துகளும் மாத்திரம் உள்ளன. பை A இல் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கறுப்புப் பந்துகளும் பை B இல் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் பை C இல் m வெள்ளைப் பந்துகளும் $(m+1)$ கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பையை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து அப்பையிலிருந்து எழுமாற்றாக இரு பந்துகள் ஒன்றன் பின்னொன்றாகப் பிரதிவைப்பு இல்லாமல் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன. வெளியே எடுக்கப்பட்ட முதற் பந்து வெள்ளையாகவும் வெளியே எடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் பந்து கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{18}$ ஆகும். m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மேலும் வெளியே எடுக்கப்பட்ட முதற் பந்து வெள்ளை எனவும் வெளியே எடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் பந்து கறுப்பு எனவும் தரப்படின், பை C தெரிந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழு ஒரு புள்ளிவிவரவியல் வினாவுக்கு அவர்களுடைய விடைகளுக்காகப் பெற்ற புள்ளிகளின் பரம்பல் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

புள்ளி வீச்சு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 - 2	15
2 - 4	25
4 - 6	40
6 - 8	15
8 - 10	5

இப்பரம்பலின் இடை μ ஐயும் நியம விலகல் σ ஐயும் மதிப்பிடுக.

அத்துடன், $\kappa = \dfrac{3(\mu - M)}{\sigma}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் ஓராயக் குணகம் κ ஐயும் மதிப்பிடுக; இங்கு M ஆனது பரம்பலின் இடையமாகும்.

* * *